

UN ESTUDIO PRELIMINAR SOBRE CONVEXIDAD

González, Mirta Susana
Profesora Titular Cálculo II
Facultad de Ciencias Económicas,
UNCuyo

Introducción:

En diversas áreas de la matemática aplicada un dilema frecuente es la búsqueda de la solución más apropiada para determinado problema. Si la naturaleza del problema lo permite, es conveniente formularlo en términos matemáticos para encarar su solución. Esta búsqueda de valores óptimos constituye el tema de estudio de la Optimización Matemática. Pero para poder abordar la teoría de optimización se necesitan conocimientos elementales sobre convexidad de conjuntos y funciones. En especial para el estudio de la teoría económica, el problema de convexidad constituye un importante desafío.

La Matemática ofrece un conjunto de técnicas que permite saber si el problema tiene solución y, en caso de tenerla, localizarla, conocer sus características e identificar la mejor. Las técnicas para analizar si los valores encontrados como posibles extremos efectivamente lo son, dependen de las características de concavidad y/o convexidad de la función. Los problemas sobre extremos, es decir determinar cuál es la decisión óptima a tomar en una situación, requieren un estudio especial sobre convexidad de conjuntos y de funciones.

Por otro lado también es necesario el análisis de convexidad para conocer el ritmo en que una función crece o decrece. Si la función es creciente y el aumento que experimenta es cada vez mayor, se dice que crece a “ritmo creciente”. En cambio si es creciente pero el aumento es cada vez menor, se dice que crece a “ritmo decreciente”. En el primer caso la función es convexa y en el segundo caso la función es cóncava. Condiciones más débiles que las necesarias para la concavidad y convexidad de funciones están dadas en los conceptos de funciones cuasiconvexas y cuasicóncavas, que necesitan conocer los estudiantes de la Licenciatura en Economía.

Dada la importancia que tiene el estudio de la convexidad, previo al desarrollo de los temas de Optimización contenidos en la asignatura Cálculo II, es necesario reforzar el estudio de conjuntos convexos. Este documento constituirá un estudio preliminar que será trabajado a distancia, vía Internet, en el espacio que la materia posee en el Campus Virtual de la UNCuyo: <http://uncuvirtual.uncuyo.edu.ar>. Como lo requiere la modalidad de autoaprendizaje que se aplica en las instancias virtuales de los cursos, este material didáctico tiene un formato dialogado, con gran contenido gráfico, y parámetros visuales que lo hagan ameno y sencillo para su lectura en soledad, con apoyo tutorial por parte del docente, vía Internet.

Por su implicancia en la formalización de conceptos sobre conjuntos y funciones convexas, a partir de nociones elementales abordadas en una asignatura anterior en el plan de estudios, de combinación lineal de vectores en un espacio vectorial real, se trata en particular las combinaciones lineales convexas. A partir de la combinación lineal convexa se obtienen expresiones analíticas formales de conjuntos convexos y de conjuntos que constituyen la cápsula convexa de un conjunto finito de puntos.

Desarrollo:

A- ¿Recuerdas qué es una *combinación lineal* entre vectores de un espacio vectorial?

Dados dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} de un espacio vectorial, se llama “combinación lineal de \mathbf{u} y \mathbf{v} ” a cualquier expresión de la forma $(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v})$ donde α y β son escalares (números reales).

Un vector \mathbf{w} es combinación lineal de \mathbf{u} y \mathbf{v} si existen números reales α y β que permiten expresar \mathbf{w} de la forma $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}$.

Dado un conjunto finito de vectores v_1, v_2, \dots, v_n de un espacio vectorial real, una **combinación lineal** (CL) de esos vectores es un vector de la forma:

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ en la cual los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son números reales.

Los vectores son conjuntos ordenados de números reales, tantas componentes como la dimensión del espacio vectorial al cual pertenecen. Si el vector se ubica con su punto inicial en el origen de coordenadas, sus componentes son las coordenadas del punto final. Esto hace que todo vector quede determinado de manera única por las coordenadas del punto final y permite su representación gráfica si el espacio es R^2 o R^3 .

Considera los vectores de R^2 : $\mathbf{u} = (2,1)$ $\mathbf{v} = (-1,3)$ $\mathbf{r} = \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

- a- Realiza combinaciones lineales entre \mathbf{u} y \mathbf{v} y representa gráficamente.
- b- Realiza combinaciones lineales entre \mathbf{u} y \mathbf{r} y representa gráficamente.

Puedes comprobar lo realizado, con ayuda del programa *Mathematica*, accediendo a un archivo que también te permitirá efectuar la representación gráfica.

- a- Se hace la combinación lineal $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}$ utilizando la generación aleatoria de los escalares α y β , con la instrucción "Random".

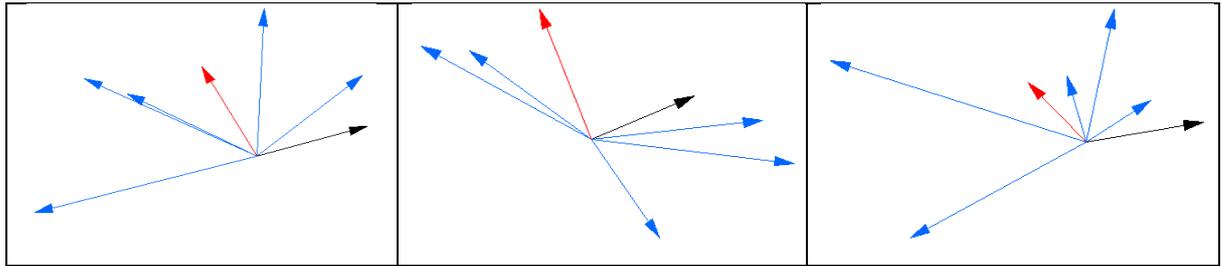
Debes evaluar la celda varias veces y observar los distintos resultados.

Los vectores iniciales \mathbf{u} y \mathbf{v} aparecerán gráficamente en color negro y rojo, respectivamente. Los vectores resultantes de la combinación lineal aparecerán en color azul.

Accede haciendo “Ctrl + clic” a:

[combinación lineal.nb](#)

Se muestran las gráficas de algunos posibles resultados:



Observa que los vectores u y v son Linealmente Independientes.

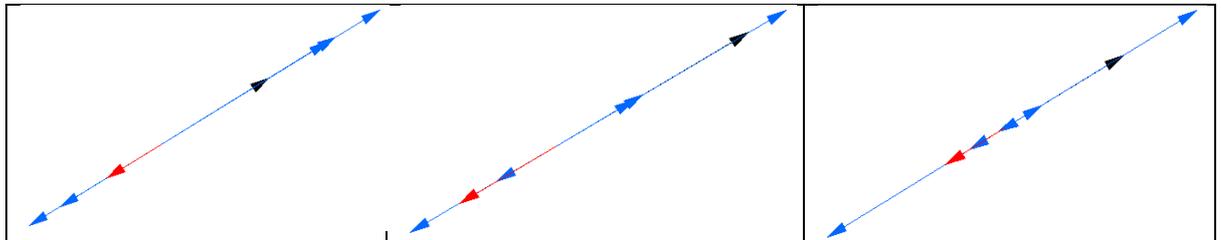
b- Luego se repite el proceso haciendo la combinación lineal entre u y r : $w = \alpha u + \beta r$

Debes evaluar la celda varias veces y observar los distintos resultados.

Los vectores iniciales u y r aparecerán gráficamente en color negro y rojo, respectivamente.

Los vectores resultantes de la combinación lineal aparecerán en color azul.

Las gráficas de algunos posibles resultados son:



Observa que los vectores u y r son Linealmente Dependientes.

Intenta contestar las siguientes preguntas:

¿Qué obtienes con la combinación lineal? ¿Dónde se encuentran los puntos obtenidos?

¿Qué diferencia encuentras entre los casos a y b?

B- ¿Recuerdas qué es una combinación lineal convexa?

Si en una combinación lineal de vectores los coeficientes son todos **no negativos** y **suman uno**, se dice que la combinación lineal es convexa.

Dado un conjunto finito de vectores v_1, v_2, \dots, v_n de un espacio vectorial real, una **combinación lineal convexa** (CLC) de esos vectores es un vector de la forma:

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ en la cual los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son números reales que satisfacen:

$$\forall i = 1, \dots, n: \alpha_i \in [0,1] \quad \text{y} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$$

La combinación lineal convexa de dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} , puede escribirse de la forma:

$$\mathbf{w} = \alpha \mathbf{u} + (1 - \alpha) \mathbf{v} \quad \text{con } \alpha \in [0,1]$$

siendo ésta una forma muy utilizada en las áreas de aplicación, pues asegura que la sumatoria de los coeficientes es igual a uno.

Volviendo a considerar los vectores de R^2 : $\mathbf{u} = (2,1)$ $\mathbf{v} = (-1,3)$
realiza ahora combinaciones lineales convexas entre \mathbf{u} y \mathbf{v} y representa gráficamente.

Comprueba lo realizado, con ayuda de *Mathematica*, accediendo con "Ctrl + clic" a:
[combinación lineal convexa.nb](#)

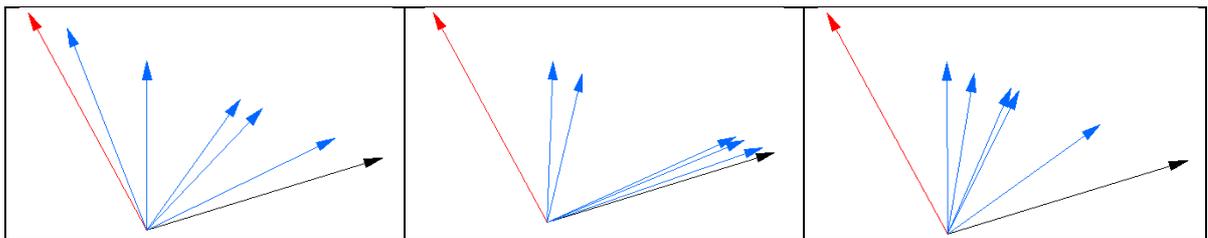
Se hace la combinación lineal $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{u} + (1 - \alpha) \mathbf{v}$ utilizando la generación aleatoria del escalar $\alpha \in [0,1]$, con la instrucción "Random".

Debes evaluar la celda varias veces y observar los distintos resultados.

Los vectores iniciales \mathbf{u} y \mathbf{v} aparecerán gráficamente en color negro y rojo, respectivamente.

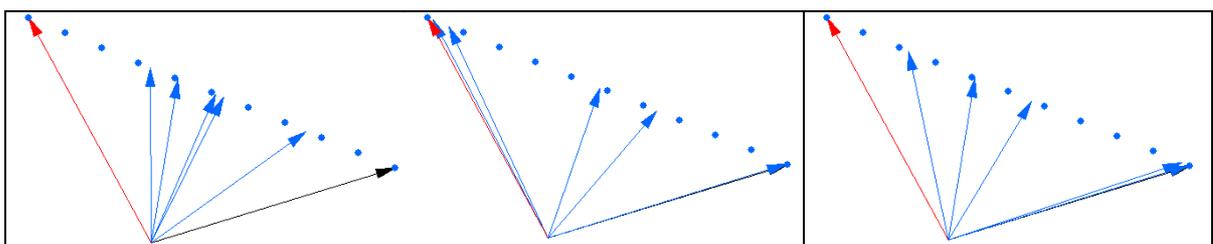
Los vectores resultantes de la combinación lineal convexa aparecerán en color azul.

Te mostramos las gráficas de algunos posibles resultados:



Observa la posición de los puntos obtenidos ahora, con la CLC...

Si no has advertido la ubicación de los puntos, observa las siguientes gráficas:



- a) Gráficamente se observa que dados dos vectores \mathbf{u}, \mathbf{v} pertenecientes a R^n , si se efectúa una Combinación Lineal Convexa (CLC) $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{u} + (1 - \alpha) \mathbf{v}$, se obtiene un punto del vector diferencia $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$.

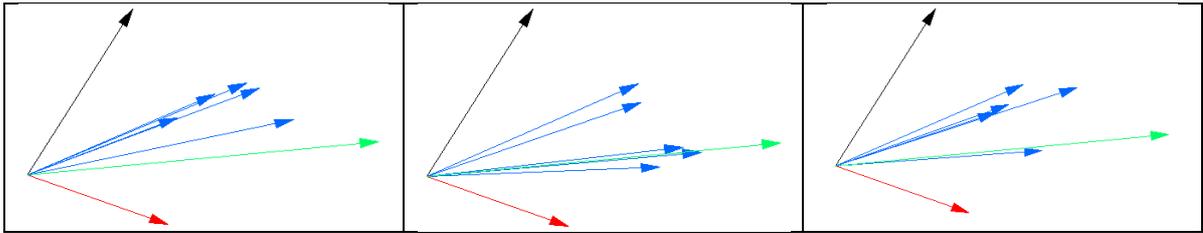
La expresión matemática de un segmento se logra haciendo la CLC de sus puntos extremos.

Veamos qué ocurre si consideramos tres puntos $P_1(3,10)$, $P_2(4,-3)$, $P_3(10,2)$ del plano. Hacemos la CLC de los tres vectores que ubican con su extremo a dichos puntos:

$$\mathbf{v}_1 = (3,10) \quad \mathbf{v}_2 = (4,-3) \quad \mathbf{v}_3 = (10,2)$$

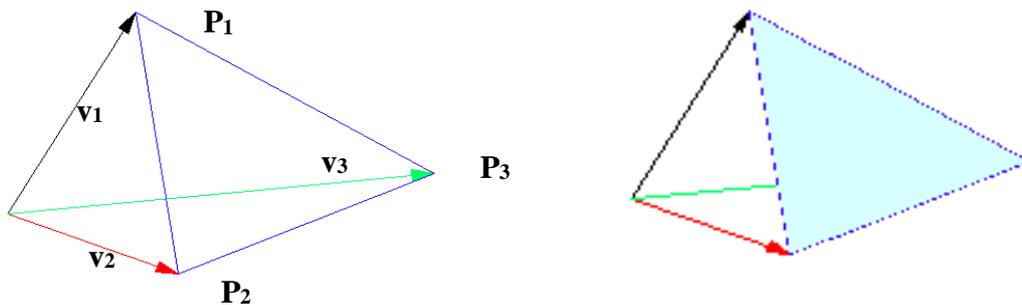
$$\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 \quad \text{con} \quad \forall i: \alpha_i \geq 0 \text{ y } \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

Puedes observar con auxilio de *Mathematica*, en el archivo: [combinación lineal convexa.nb](#)

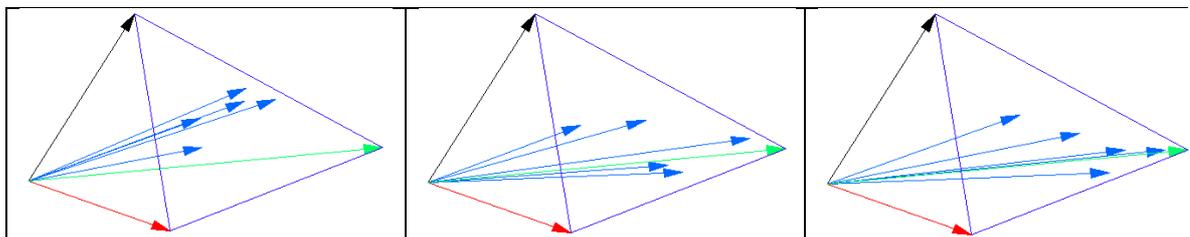


¿Adviertes qué ocurre con los puntos resultantes?

Tal vez la siguiente representación te ayude a descubrirlo:



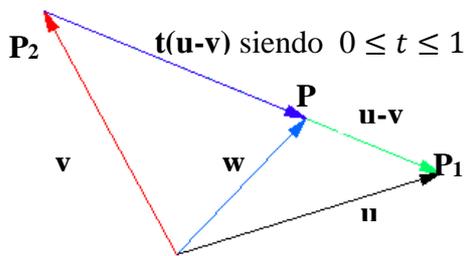
Repite el proceso y la representación de nuevas combinaciones lineales convexas.



- b) Gráficamente se observa que dados tres vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ pertenecientes a R^n , si se efectúa una Combinación Lineal Convexa (CLC) $\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3$, se obtiene un punto del triángulo formado por dichos puntos.

Podemos probar analíticamente las afirmaciones a) y b):

- a) Si se efectúa una Combinación Lineal Convexa (CLC) $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{u} + (1 - \alpha) \mathbf{v}$, se obtiene un punto del vector diferencia $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$.



Si P es un punto comprendido entre P_1 y P_2 debe ser:

$$(P - P_1) = t(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad \text{siendo } 0 \leq t \leq 1$$

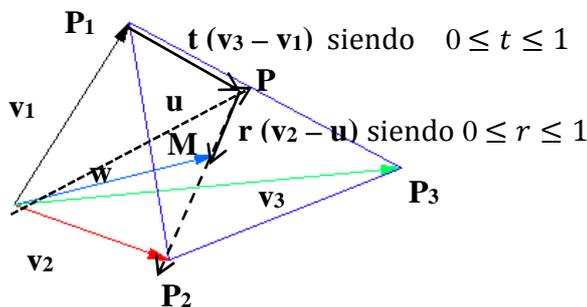
$$\mathbf{w} = \mathbf{v} + (P - P_1) = \mathbf{v} + t(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{v} + t\mathbf{u} - t\mathbf{v} = t\mathbf{u} + (1 - t)\mathbf{v}$$

Resulta:

$$\mathbf{w} = t\mathbf{u} + (1 - t)\mathbf{v} \quad \text{que es una CLC pues } 0 \leq t \leq 1$$

Los puntos obtenidos con la CLC de los vectores \mathbf{u}, \mathbf{v} son los puntos del segmento $\overline{P_1P_2}$. Este segmento es un conjunto convexo.

- b) Si se efectúa una Combinación Lineal Convexa (CLC) $\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3$, se obtiene un punto del triángulo formado por dichos puntos.



$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + t(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) + r(\mathbf{v}_2 - \mathbf{u})$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + t(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) + r(\mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_1 + t(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)))$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_3 - t\mathbf{v}_1 + r\mathbf{v}_2 - r\mathbf{v}_1 - r t\mathbf{v}_3 + r t\mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{w} = (1 - t - r + r t)\mathbf{v}_1 + r\mathbf{v}_2 + (t - r t)\mathbf{v}_3$$

- \mathbf{w} es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$

La suma de los coeficientes es:

$$(1 - t - r + r t) + r + (t - r t) =$$

$$= 1 - t - r + r t + r + t - r t = \mathbf{1}$$

Entonces:

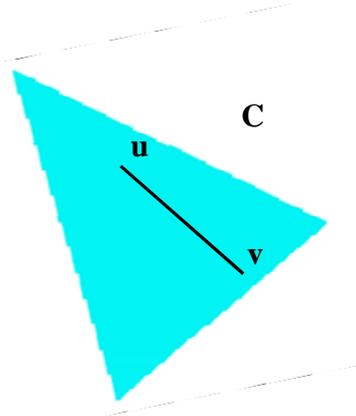
\mathbf{w} es combinación lineal convexa de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$

Los puntos obtenidos con la CLC de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ son los puntos del triángulo formado por los puntos P_1, P_2, P_3 . Este triángulo es un conjunto convexo.

Recordamos a continuación qué es un conjunto convexo.

C- ¿Qué es un conjunto convexo o cóncavo?

Un conjunto C se denomina **CONVEXO** si y sólo si para todo par de puntos u, v de C y para todo $\alpha \in [0, 1]$, se verifica que:
 $w = \alpha u + (1 - \alpha) v$ pertenece a C .



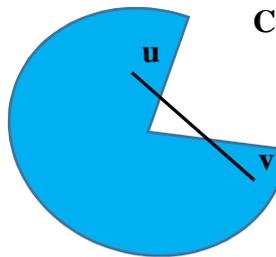
El conjunto $I = \{x \in R / -2 \leq x < 5\}$ es un conjunto convexo.

El conjunto $A = \{(x, y) \in R^2 / y \geq x^2\}$ es un conjunto convexo.

El conjunto $B = \{(x, y) \in R / y = x^2\}$ no es un conjunto convexo.

- *La intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo.*
- *La unión de conjuntos convexos, en general, no es un conjunto convexo.*

Un conjunto C se denomina **CÓNCAVO** si y sólo si existe algún par de puntos u, v de C y algún $\alpha \in (0, 1)$, tal que:
 $w = \alpha u + (1 - \alpha) v$ no pertenece a C .



El conjunto $I = \{x \in R / -2 \leq x < 5 \text{ o } 5 < x < 10\}$ es un conjunto cóncavo.

El conjunto $A = \{(x, y) \in R^2 / y \leq x^2\}$ es un conjunto cóncavo.

El conjunto $B = \{(x, y) \in R / y = x^2\}$ es un conjunto cóncavo.

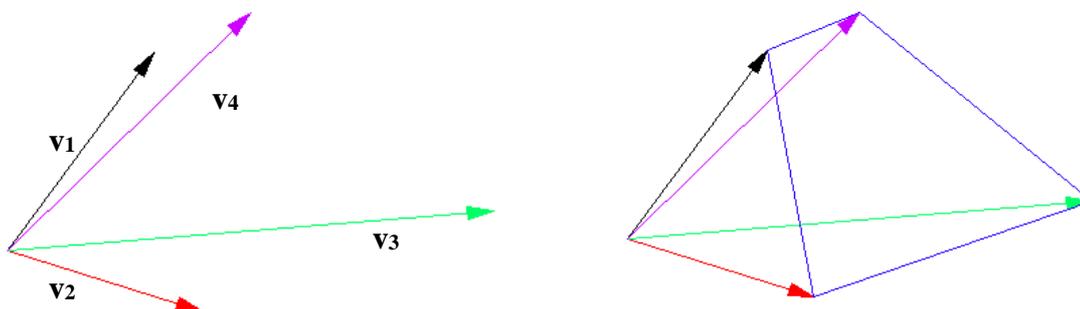
Volvamos a pensar en la interpretación geométrica de una CLC:

- de dos vectores distintos en R^2 o R^3 resulta un segmento (conjunto convexo).
- de tres vectores distintos en R^2 o R^3 resulta un triángulo (conjunto convexo).

Consideremos ahora dos casos de cuatro vectores en R^2 :

I. A los tres puntos $P_1(3,10)$, $P_2(4,-3)$, $P_3(10,2)$ agreguemos el punto $P_4(5,12)$.

Gráficamente:



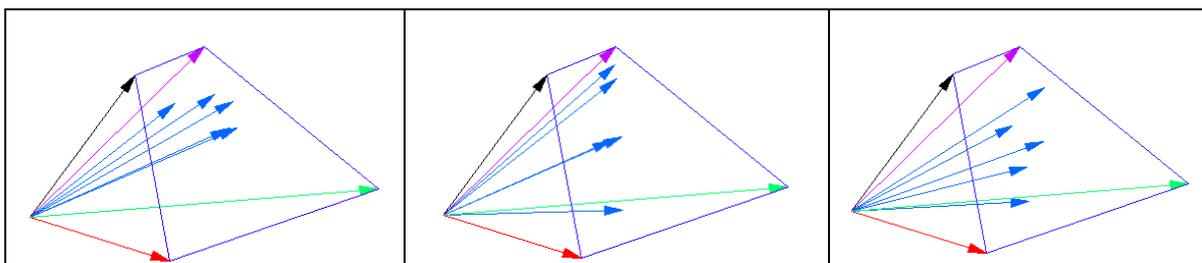
Hacemos la CLC de los cuatro vectores que ubican con su extremo a dichos puntos:

$$\mathbf{v}_1 = (3,10) \quad \mathbf{v}_2 = (4,-3) \quad \mathbf{v}_3 = (10,2) \quad \mathbf{v}_4 = (5,12)$$

$$\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 + \alpha_4 \mathbf{v}_4 \quad \text{siendo} \quad \forall i: \alpha_i \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^4 \alpha_i = 1$$

Puedes observar con auxilio de *Mathematica*, en el archivo: [combinación lineal convexa.nb](#)

Algunas respuestas son:



Los puntos obtenidos con la CLC de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ son los puntos del cuadrilátero formado por los puntos P_1, P_2, P_3, P_4 . Este cuadrilátero **es un conjunto convexo**.

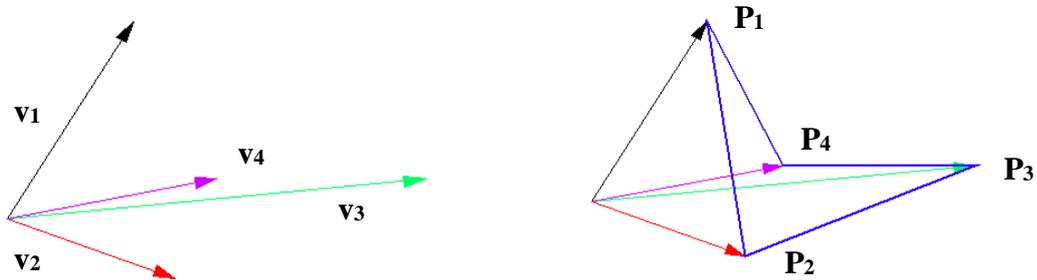
La conclusión anterior de haber logrado un conjunto convexo, es similar a la obtenida para dos y tres puntos.

Sin embargo no siempre el conjunto limitado por todos los puntos o vectores considerados pueden formar un polígono convexo, al cual pertenezcan las combinaciones lineales convexas.

Veamos el siguiente caso:

II. A los tres puntos $P_1(3,10)$, $P_2(4,-3)$, $P_3(10,2)$ agreguemos el punto $P_4(5,2)$.

Gráficamente:



El polígono que resultó es cóncavo.

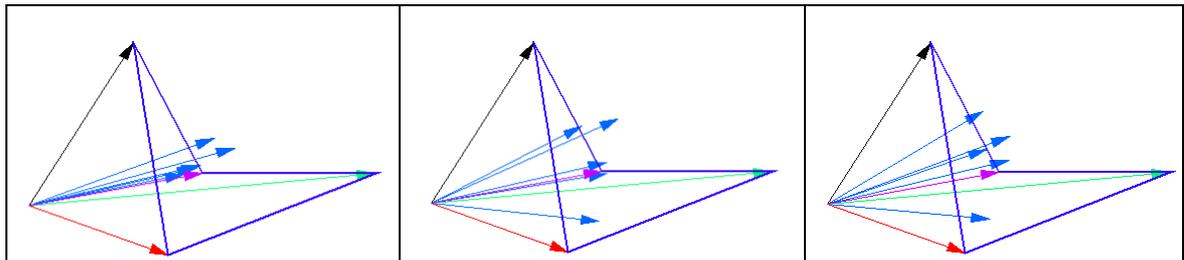
Si hacemos la CLC de los cuatro vectores que ubican con su extremo a dichos puntos:

$$\mathbf{v}_1 = (3,10) \quad \mathbf{v}_2 = (4,-3) \quad \mathbf{v}_3 = (10,2) \quad \mathbf{v}_4 = (5, 2)$$

$$\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 + \alpha_4 \mathbf{v}_4 \quad \text{con } \forall i: \alpha_i \geq 0 \text{ y } \sum_1^4 \alpha_i = 1$$

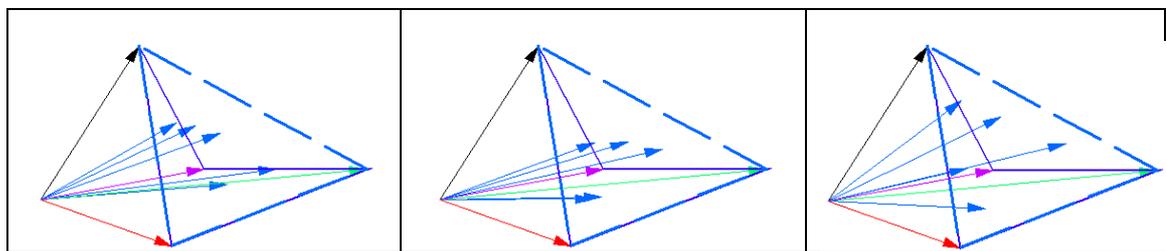
Resuelve y grafica con ayuda de *Mathematica*, en el archivo: [combinación lineal convexa.nb](#)

Algunas respuestas gráficas son:



Se puede observar que los puntos obtenidos con las CLC no todos pertenecen al polígono!

Repetimos los gráficos marcando el triángulo formado por los puntos P_1, P_2, P_3 :



Este triángulo es la **envoltura o cápsula convexa** del conjunto de puntos P_1, P_2, P_3, P_4 .

Cápsula convexa de un conjunto de puntos es el conjunto que se obtiene con la CLC de los mismos. Todas las combinaciones lineales convexas están dentro de la cápsula convexa.

Definición:

Sea S un subconjunto de \mathbb{R}^n , conjunto de k puntos $S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$.

Se denomina **envoltura o cápsula convexa** de S , al conjunto $C(S)$ formado por todas las combinaciones convexas de los elementos de S :

$$C(S) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \quad \text{tal que: } x_i \in S, \alpha_i \in [0,1] \text{ y } \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \right\}$$

Dado un conjunto de puntos en el plano, si no todos están alineados, la cápsula convexa es un polígono convexo cuyos vértices son algunos puntos del conjunto inicial de puntos.

- $C(S)$ es el menor conjunto convexo que contiene a S .
- $C(S)$ es la unión de todos los triángulos determinados por puntos de S .
- $C(S)$ es la intersección de todos los semiespacios que contienen a S .
- Un punto de S es un vértice de $C(S)$ si no existe ningún triángulo determinado por puntos de S que lo incluya.

Existen numerosos problemas de las ciencias aplicadas que requieren la determinación de la envoltura convexa de un conjunto de puntos. Por ejemplo una empresa de distribución que conoce la ubicación de los puntos de venta y quiere contar con un mapa para organizar las entregas con el menor costo de transporte. Otro problema que requiere el auxilio del cálculo de la cápsula convexa está dado por el diseño de embalajes de contención o transporte de ciertos artículos, con el mayor aprovechamiento de espacio y con el mínimo costo.

La diversidad de problemas que surgieron desde hace unas décadas, y el desarrollo de la Informática, hicieron que se desarrollara una rama muy importante de las ciencias de la computación que se denomina Geometría Computacional.

En ese ámbito se aplican diversos algoritmos geométricos, con mayor o menor grado de complejidad, para encontrar la envoltura convexa de un conjunto de puntos.

BIBLIOGRAFÍA:

1. BARBOLLA R., CERDÁ E., SANZ P. (2001) *Optimización*, España, Prentice Hall.
2. BESADA M., GARCÍA F., MIRÁS M., VÁZQUEZ C. (2001) *Cálculo de varias variables – Cuestiones y ejercicios resueltos*. España, Prentice Hall.
3. ROCKAFELLAR R. T. (1997) *Convex Analysis*, Princeton University Press.
4. WEISSTEIN E. W. *Convex Hull*, MathWorld- Wolfram Research:
<http://mathworld.wolfram.com/ConvexHull.html>